# TP SdF N° 14

# Estimation Bayésienne

Ce TP a pour objet d'estimer la fiabilité de nouveaux équipements en cherchant à minimiser le nombre d'essais dans le cas d'un taux de panne constant (loi exponentielle) et d'un système monocoup (loi de Bernouilli).

**Problème 1 :**

50 équipements électroniques ont été mis en test pendant 1 an. Un seul est tombé en panne après 0,3 ans.

Quel taux de défaillance à 60% de confiance ce test permet-il de justifier ?

Sachant que le taux de défaillance de ce type d'équipement a été estimé à 1000 fits ($10^{-6}$ $hr^{-1}$) par la norme MIL HDBK 217 et que le risque que le taux de défaillance réel soit inférieur à 3 fois la valeur de cette estimation est inférieur à 10 % selon un jugement d'expert, de combien peut-on améliorer le résultat du test par estimation bayésienne ?

De quelle durée faudrait-il prolonger le test initial pour obtenir un même résultat en supposant qu'aucune panne supplémentaire ne survienne ?

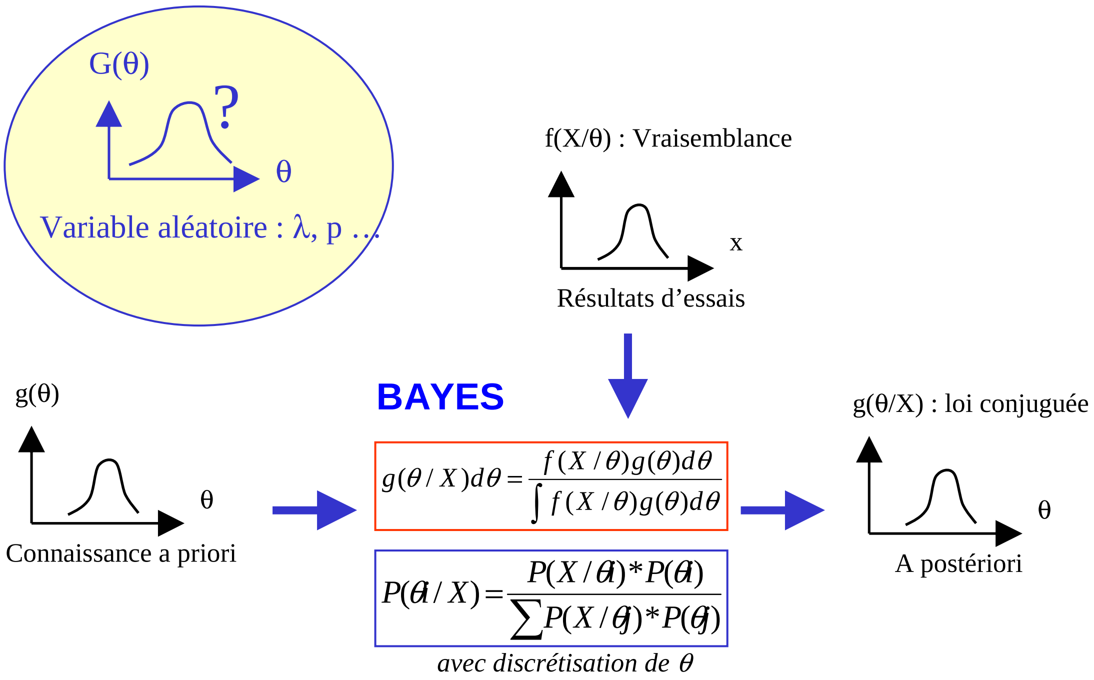
**Problème 2 :**

Un feu d'artifice de conception nouvelle doit démontrer une probabilité de succès de 95 % à 60% de confiance. Combien d'essais (destructifs) sans défaillance faut-il réaliser pour justifier cette performance ?

Sachant que cette conception résulte de diverses modifications d'un produit en service qui toutes devraient améliorer la fiabilité opérationnelle actuellement égale à 90 % et que les experts consultés garantissent cette amélioration à plus de 70 % de chance, de combien peut-on réduire le nombre d'essais ?

**Principe de l'estimation bayésienne**

Basée sur la formule de Bayes, l'estimation bayésienne consiste à combiner des données statistiques (résultats d'essais…) avec une connaissance a priori (expériences passées, jugement d'expert, estimations empiriques, etc.).




θ est le paramètre d'une loi de probabilité que l'on cherche à estimer, soit le taux de défaillance λ dans le cas d'une loi exponentielle ou la probabilité d'échec p dans le cas d'une loi de Bernouilli.

La fonction de vraisemblance donne la probabilité de chacun des résultats possibles de l'essai pour une valeur de θ.

*Soit la loi de Poisson :* $P(k) = \dfrac{(\lambda T)^k e^{-\lambda T}}{k!}$ *avec k le nombre de pannes pendant la durée cumulée T,*

*ou la loi Binomiale :* $P(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ *avec n le nombre d'essais.*

La loi conjugée donne la densité de probabilité de θ sachant qu'un résultat d'essais a été obtenu.

*Soit la loi Gamma :* $g(\lambda / k, T) = \dfrac{\lambda^k T^{k+1} e^{-\lambda T}}{k!}$ *si k pannes sont survenues pendant la durée cumulée T,*

*ou la loi Beta :* $g(p / k, n) = \dfrac{(n+1)!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$ *si n essais ont conduit à k échec et n-k succès.*

Dans les cas de la loi de poisson et de la loi binomiale, l'a priori peut être simplement converti en essai virtuel qui s'ajoute à l'essai réel :

*Soit dans le cas de la loi de Poisson :* *k = k0 + k1* *T = T0 + T1*

*et de la loi binomiale : k = k0 + k1* *n = n0 + n1*

**Problème 1 :**

50 équipements électroniques ont été mis en test pendant 1 an. Un seul est tombé en panne après 0,3 ans.

Le taux de défaillance à 60% de confiance que ce test permet de justifier correspond à la borne supérieure de l'intervalle de confiance unilatéral au risque $\alpha$ = 40%

Soit $\dfrac{\chi^2_{1-\alpha}(2k+2)}{2T} = \chi^2_{60\%}(4)/(2*49{,}3*365*24) =$ 4683 fits avec $T_1$ = 49,3 ans et $k_1$ = 1 panne

(=KHIDEUX.INVERSE($\alpha$;2*k+2)/(2*T) sous Excel)

Remarque : ce même résultat peut s'obtenir par intégration de la loi conjuguée Gamma :

$$\text{Probabilité } (\lambda \leq \lambda_{sup}) = 1-\alpha = \int_0^{\lambda sup} g(\lambda / k, T) d\lambda$$

Le taux de défaillance de ce type d'équipement a été estimé à 1000 fits ($10^{-9}$ $hr^{-1}$) par la norme MIL HDBK 217 et l'on considère que le risque que le taux de défaillance réel soit inférieur à 3 fois la valeur de cette estimation est inférieur à 10 %.

Ce jugement d'expert peut être converti en essais virtuels tels que $\lambda_{moy} = k_0/T_0$ = 1000 fits et $\lambda_{sup90\%} \geq$ 3000 fits.

$$\lambda_{sup90\%} = \chi^2_{90\%}(2k_0+2) * \lambda_{moy} / 2\, k_0 = \text{ 3890 fits pour } k_0 = 1 \text{ et 2661fits pour } k_0 = 2$$

Seule la configurationt $k_0$ = 1 pannes et $T_0$ = 1000 000 heures satisfait cette condition.

Les essais virtuels peuvent alors s'ajouter aux essais réels comme le montre la figure ci-dessous (ouverture du fichier Excel sur double clic) :

**λmoy :** 1000 fits **λ90%$_{expert}$ :** 3000 fits

KHIDEUX.INVERSE(0,09;2*$k_0$+2)/(2*$T_0$)

**λ90%$_{essai\ équivalent}$ :** **3890** ≥ **λ90%$_{expert}$**

| | Mil HDBK | |
|---|---|---|
| $k_0$ : | 1 | |
| $T_0$ : | 1000000 | hr |

| | Essai | |
|---|---|---|
| $k_1$ : | 1 | |
| $T_1$ : | 431868 | hr |

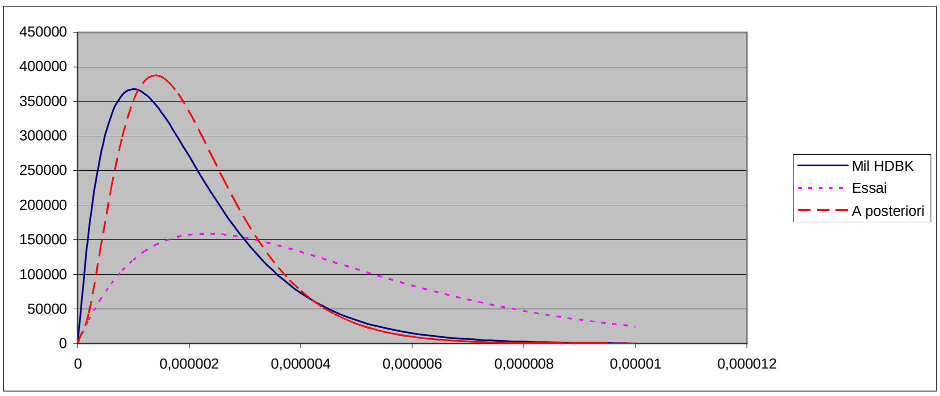
| | A posteriori | |
|---|---|---|
| k : | 2 | |
| T : | 1431868 | hr |

| | Intégration loi Gamma | Khideux inverse | |
|---|---|---|---|
| λ60% Mil HDBK : | 2000 | 2022 | fits |
| λ60% Essai : | 4600 | 4683 | fits |
| λ60% A posteriori : | 2200 | 2169 | fits |

**Essais équivalents**

| | | |
|---|---|---|
| ke : | 1 | |
| Te : | 932474 | hr |

2169 fits

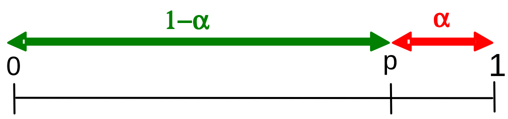



L'estimation bayésienne permet d'obtenir un taux de défaillance de 2169 fits à 60% au lieu de 4683 à l'issue des essais. Un même résultat aurait été obtenu en prolongeant la durée d'essais d'un facteur 2,2 (l'outil d'optimisation Gencab est utilisé dans cette exemple pour effectuer le calcul inverse).

**Problème 2 :**

Le feu d'artifice doit démontrer une probabilité de succès de 95 % à 60% de confiance. Soit p la probabilité d'échec, la borne supérieure de l'intervalle de confiance unilatéral pour la loi binomiale s'exprime de la manière suivante :

$$\boxed{\sum_{k=o}^{m} C_n^k\, p^k (1-p)^{n-k} = \alpha}$$




avec k1 = 0 on obtient $(95\%)^{n1} \leq 40\%$ soit $n_1 \geq \log(0{,}4)/\log(0{,}95) = 18$

En l'absence de défaillance, 18 essais (destructifs) sont à réaliser pour justifier la tenue de l'objectif.

La fiabilité du produit à plus de 70 % de chance de dépasser celle d'un produit actuellement en service dont la fiabilité opérationnelle est égale à 90 %.

Cet avis d'expert peut se traduire en essais virtuels sans échec de la même manière que précédemment :

$$(90\%)^{n0} \geq\ 30\% \text{ soit } n_0 \leq \log(0{,}3)/\log(0{,}90) = 11$$

Les essais virtuels s'ajoutant aux essais réels, seuls 7 essais supplémentaires sont nécessaires comme l'illustre la figure ci-dessous (ouverture du fichier Excel sur double clic) :

| | REX |
|---|---|
| $k_0$ : | 0 |
| $n_0$ : | 11 |

| | Expert |
|---|---|
| Taux de défauts : | 10% |
| Confiance : | 70% |

| | Essai |
|---|---|
| $k_1$ : | 0 |
| $n_1$ : | 7 |

| | A posteriori |
|---|---|
| k : | 0 |
| n : | 18 |

| | Fiabilité à 60% |
|---|---|
| A priori | 0,9201 |
| Essai | 0,8773 |
| A posteriori | 0,9504 |